Übungen zur Einführung in die Astrophysik I

Musterlösung

René Reifarth, Tanja Heftrich
Anton Görtz, Tanja Heftrich, Enis Lorenz, Dominik Plonka, Mario Weigand

Aufgabe $1(a)$
Das Gravitationspotential der Erde ist ein Zentralpotential. Es gilt somit:

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{1}$$

wobei γ die Gravitationskonstante, M die Masse des Zentralkörpers und m die Masse des Sateliten ist.
Die Geschwindigkeit v kann man also wie folgt berechnen:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} \tag{2}$$

Es handelt sich um eine Kreisbewegung, daher kann die Geschwindigkeit v beschrieben werden als:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{3}$$

Umgestellt nach der Umlaufdauer T gilt:

$$T = \sqrt{r^3 \frac{4\pi^2}{\gamma M}} \tag{4}$$

In dem betrachteten Fall ist:

$$r = R_{\otimes} + h \tag{5}$$

$$r = 6378000m + 610000m = 6988000m \tag{6}$$

Für die Umlaufzeit gilt also:

$$T = \sqrt{6988000m^3 \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2} 5,97 \cdot 10^{24}kg}} \tag{7}$$

$$T = 5816s = 96,9min \tag{8}$$

Aufgabe $1(b)$
Ein geostationärer Satellit umkreist die Erde in 23 Stunden, 56 Minuten und 4 Sekunden. Das ist genau die Zeit, die die Erde braucht, um sich einmal um ihre Achse zu drehen. Die Umlaufzeit der Erde ist:

$$T = 86164s \tag{9}$$

Setzt man diesen Wert nun in Gleichung 4 ein, kann man den Abstand vom Drehzentum berechen:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \gamma M}{4\pi^2}} \tag{10}$$

Somit ergibt sich für

$$r = 42133km \tag{11}$$

Hierbei muss aber wie in Gleichung 5 darauf geachtet werden, dass es sich um die gesammte Höhe handelt. Zieht man den Erdradius $R_\otimes$ ab, kommt man auf folgendes Ergebnis:

$$h = 42133km - 6378km = 35755km \tag{12}$$

Aufgabe $1(c)$
Die Satelliten befinden sich auf einer kreisförmigen Umlaufbahn, wo sich Zentrifugalkraft und Erdanziehungskraft gegenseitig aufheben, weil sie in gegengesetzte Richtungen wirken. Nur so ist es möglich, dass der Satellit sich synchron zur Erde bewegt. Die Physik lässt dies mit einem geringen energetischen Aufwand, aber nur in der Äquatorebene, also über dem Äquator zu. Hierbei muss der Mittelpunkt der Satellitenbahn stets mit dem Erdmittelpunkt zusammenfallen. Wäre dies nicht der Fall, so würde sich der Satellit von der Erde aus abwechselnd nach Norden oder Süden bewegen. Die auf den Satelliten ausgerichteten Antennen auf der Erde müssten ständig nachgeführt werden.

Aufgabe $2(a)$
Der Srahlungsfluss wird wie folgt berechnet:

$$s = \frac{L}{4\pi r^2} \tag{13}$$

Hierbei gibt L die Luminosität, also die Lichtleistung des Sterns an. Die Solarkonstante gibt den Strahlungsfluss der Sonne auf der Erde an und liegt bei: 1365 W/m^2. Mit der Luminosität der 100 W Glühbirne lässt sich nun der Abstand berechnen:

$$r^2 = \frac{L}{4\pi s} \tag{14}$$

$$r = \sqrt{\frac{100W}{4\pi 1365 W/m^2}} \approx 0,0764\mathrm{m} = 7,64\mathrm{cm} \tag{15}$$

Aufgabe $2(b)$
Der Abstand der Sonne zur Erde ist 1 AE. Der Abstand der Sonne zum Neptun ist 30AE, also 30 mal so weit. Da sich der Strahlungsfluss quadratisch mit der Entfernung ändert (zum Neptun wie auch zur Glühbirne), kann man das Ergebnis aus Aufgabe $2(a)$ damit skalieren:

$$s_{Neptun} = 7.64 \text{ cm} \cdot 30 = 2,29 \text{ m} \tag{16}$$

Aufgabe $2(c)$
Bei gegebenem Strahlungsfluss (der hier der Solarkonstante $\eta = 1365 W/m^2$ entpricht) und gegebener Entfernung von $1AE = 1,49597870691 \cdot 10^{11} m$ kann man mit Formel 13 die Leuchtkraft wie folgt bestimmen:

$$L = 4\pi r^2 s \tag{17}$$

$$L = 4\pi (1,49597870691 \cdot 10^{11} m)^2 \cdot 1365 W/m^2 \tag{18}$$

$$L = 3,86 \cdot 10^{26} W \tag{19}$$

Aufgabe $3(a)$
Das Stefan-Boltzmann-Gesetz setzt die abgestrahlte Leistung eines schwarzen Körpers mit dessen Temperatur und Oberfläche in Verbindung. Es gilt allgemein

$$P = \sigma T^4 \cdot A \tag{20}$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma = 5{,}6704 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K^4}}$.
Es lässt sich also direkt die emittierte Leistung P_{em} berechnen zu

$$P_{\text{em}} = 5{,}6704 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K^4}} (306\mathrm{K})^4 \cdot 1{,}4\mathrm{m}^2$$
$$P_{\text{em}} = 696\mathrm{W}$$

Aufgabe $3(b)$
Die Wellenlänge, bei der ein schwarzer Körper die meiste Leistung pro Wellenlängenintervall $\mathrm{d}\lambda$ abgibt, kann durch das Wiensche Verschiebungsgesetz berechnet werden. Es ist

$$\lambda T = 2{,}8978 \cdot 10^{-3} \mathrm{m\,K} \tag{21}$$

Damit also

$$\lambda = \frac{2{,}8978 \cdot 10^{-3}\mathrm{m\,K}}{T}$$
$$\lambda = \frac{2{,}8978 \cdot 10^{-3}\mathrm{m\,K}}{306\mathrm{K}}$$
$$\lambda = 9470\mathrm{nm}$$

Diese Wellenlänge liegt weit jenseits des sichtbaren Lichtbereiches (von ca. $380\mathrm{nm}$ bis $780\mathrm{nm}$) im Infraroten.

Aufgabe $3(c)$
Auch die absorbierte Leistung P_{abs} eines schwarzen Körpers folgt dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (20). Demnach ist

$$P_{\text{abs}} = 5{,}6704 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{K}^4} (293\mathrm{K})^4 \cdot 1{,}4\mathrm{m}^2$$
$$P_{\text{abs}} = 585\mathrm{W}$$

Aufgabe $3(d)$
Die Nettoleistung P_{net} ist gerade die Differenz aus absorbierter und emittierter Leistung, also

$$P_{\text{net}} = P_{\text{em}} - P_{\text{abs}}$$
$$P_{\text{net}} = 111\mathrm{W}$$

Aufgabe $3(e)$
Der Begriff des schwarzen Körpers bezeichnet ein Objekt, das elektromagnetische Strahlung in *allen* Wellenlängenbereichen *vollständig* absorbiert und diese reemittiert. Das bedeutet insbesondere, das keine einfallende elektromagnetische Strahlung reflektiert wird.
Reale Oberflächen sind in einigen Wellenlängenbereichen schwarz, in anderen jedoch nicht.